

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

# FYZIKÁLNÍ PODSTATA MATEMATICKÝCH OPERÁTORŮ V MECHANICE KONTINUA

PHYSICAL BASIC OF MATHEMATICAL OPERATORS IN CONTINUUM MECHANICS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

TEREZA KONEČNÁ

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

Ing. SIMONA FIALOVÁ, Ph.D.

BRNO 2015



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2014/2015

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Tereza Konečná

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Fyzikální podstata matematických operátorů v mechanice kontinua**

v anglickém jazyce:

### **Physical basis of mathematical operators in continuum mechanics**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Provést rešerši, vypracovat popis jednotlivých matematických operátorů na reálných příkladech mechaniky kontinua včetně matematických důkazů.

Cíle bakalářské práce:

Vypracovat skutečně použitelný soubor matematických operátorů, popsat jejich využití při výpočtech včetně matematických důkazů a pomoci pochopit čtenářům práce souvislosti aplikované matematiky.

Seznam odborné literatury:

Mechanika kontinua - Brdička

přednášky matematika, hydromechanika, fluidní inženýrství

internet

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Simona Fialová, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 24.11.2014

L.S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
Ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
Děkan fakulty

## Abstrakt

Tato bakalářská práce přibližuje čtenáři využití matematických operátorů rotace, divergence a gradient v mechanice kontinua, s uvedenými konkrétními příklady. Využití operátorů je nastíněno na konkrétních příkladech. Dále jsou uvedeny dvě integrální věty. Gauss-Ostrogradského věta s ukázkou její aplikací a použití při odvozování vztahů, rovnic a vět z mechaniky kontinua, konkrétně rovnice kontinuity proudění, 1. termodynamické věty, Eulerových pohybových rovnic a Bernoulliovy rovnice proudění ideální tekutiny. Další integrální větou je Stokesova věta s ukázkou její aplikace a použití při odvození Faradayovy věty a vztahů pro vírové proudění.

## Summary

This bachelor deals with the use of mathematical operators of rotation, divergence and gradient in continuum mechanics. The use of the operators is outlined in examples. Next, two integration theorems are discussed: the Gauss-Ostrogradski theorem with applications to the derivation of relations, equations and theorems from the mechanics of continua. More specifically, the equation for the continuity of flow, first law of thermodynamics, Euler's laws of motion and Bernoulli's principle for ideal fluid. Another integration theorem is the Stokes' theorem, which is applied in this thesis to deduce the Faraday theorem and formulas for vorticity.

## Klíčová slova

mechanika kontinua, operátor rotace, operátor divergence, operátor gradient, Gauss-Ostrogradského věta, Stokesova věta

## Keywords

continuum mechanics, rotation operator, divergence operator, gradient operator, Gauss-Ostrogradski theorem, Stokes' theorem

KONEČNÁ, T. *Fyzikální podstata matematických operátorů v mechanice kontinua*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 39 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Simona Fialová, Ph.D.



Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením  
Ing. Simony Fialové, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu použité literatury.

27.května 2015

.....

Tereza Konečná





Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí bakalářské práce Ing. Simoně Fialové, Ph.D. za vedení a cenné rady. Také bych ráda poděkovala své rodině a přátelům, že mě po celou dobu studia podporovali.

Tereza Konečná



# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>12</b>
<b>1 Matematické operátory</b>	<b>13</b>
1.1 Operátor rotace . . . . .	14
1.2 Operátor divergence . . . . .	16
1.3 Operátor gradient . . . . .	17
<b>2 Gauss-Ostrogradského věta</b>	<b>20</b>
2.1 Aplikace . . . . .	22
2.2 Rovnice kontinuity proudění . . . . .	23
2.3 1. termodynamická věta . . . . .	25
2.4 Eulerovy rovnice proudění ideální tekutiny . . . . .	27
<b>3 Stokesova věta</b>	<b>31</b>
3.1 Aplikace . . . . .	32
3.2 Vírové proudění . . . . .	33
<b>Závěr</b>	<b>36</b>
<b>Literatura</b>	<b>37</b>
<b>Seznam použitých zkratk a symbolů</b>	<b>38</b>

# Úvod

Při studiu na vysoké škole s technickým zaměřením studenti absolvují kurzy matematiky a fyziky. Řada z nich si pokládá otázky, k čemu jim bude matematická analýza a teoretická fyzika. Tato bakalářská práce se pokusí čtenáři odpovědět na otázky využitelnosti matematiky v technických aplikacích, konkrétně v mechanice kontinua, části mechaniky popisující mechanické jevy ve spojitých látkách, které se působením sil deformují. Na mechaniku kontinua je dobře aplikovatelný aparát spojitých funkcí a diferenciálního a integrálního počtu.

*Kontinuum*, spojité látkové prostředí, je matematicky zobrazeno jako soustava hmotných bodů, které hustě vyplňují prostor a pohybují se v něm. Libovolně vybraná oblast kontinua obecně mění svůj tvar i objem. Má nekonečný počet stupňů volnosti a zákony jeho pohybu jsou vyjádřeny parciálními diferenciálními rovnicemi obsahující derivace podle času a podle prostorových proměnných. Obecné rovnice, které popisují pohyb kontinua, vyjadřují zákony zachování hmotnosti, hybnosti, momentu hybnosti a energie. Pro úplný popis pohybu se tyto zákony doplňují termodynamickými vztahy. [4]

Na úvod práce jsou uvedeny matematické operátory, doplněné konkrétními příklady, které jsou využívány v integrálních větách Gauss-Ostrogradského a Stokesově, které jsou doplněné o příklady využití v odvozování zákonitostí mechaniky kontinua.

Definice, věty a poznámky zmíněné v této bakalářské práci jsou citovány z knihy prof. Rektoryse, *Přehled užití matematiky*. [10]

# Kapitola 1

## Matematické operátory

Pro popis jednotlivých modelových i reálných dějů či situací je výhodný vektorový počet. Tento nástroj nám umožňuje jednodušší zápis fyzikálních vztahů mezi objekty. V dalším textu budeme označovat za *vektor* uspořádanou  $n$  - tici reálných čísel ( $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ), kde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  označujeme jako *souřadnice vektoru*), pro kterou jsou definované rovnost  $((a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  právě tehdy, je-li  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ ), součet  $((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$  a součin s číslem  $(k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n))$ . Všechny tyto vektory tvoří  *$n$ -rozměrný vektorový prostor  $V_n$*  nad oborem reálných čísel. V praxi se využívá  $n = 3$ , což odpovídá trojrozměrnému prostoru okolo nás. Vektory můžeme porovnávat, sčítat či násobit reálným číslem (skalárem).

Při formulaci úloh z praxe se často setkáváme s případem, že souřadnice vektorů jsou funkcemi skalární proměnné

$$\mathbf{a}(t) = a_1(t)\mathbf{i} + a_2(t)\mathbf{j} + a_3(t)\mathbf{k}.$$

Vektorové pole je tedy vytvořeno jako množina všech vektorů pro jednotlivé hodnoty  $t$ .

Další možností, jak popsat zkoumaný objem, je pomocí *skalárního pole* - funkce, která každému bodu prostoru přiřadí skalární veličinu, například rychlost, teplotu, pevnost, energii, hustotu či tlak kontinua.

Zjednodušení zápisu můžeme docílit používáním Einsteinovy sumační konvence. Podle ní platí, že pokud se indexová proměnná objevuje v jednom členu právě dvakrát, znamená to součet přes všechny přípustné hodnoty daného indexu. Znak sumace lze vynechat.

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i\mathbf{e}_i = a_i\mathbf{e}_i,$$

kde  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  jsou přeznačené báze vektory  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

Funkce Kroneckerovo delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } i = j \\ 0 & \text{je-li } i \neq j \end{cases}$$

Levi-Civita symbol - permutační symbol

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{pokud } (i, j, k) \text{ je } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ nebo } (3, 1, 2) \\ -1 & \text{pokud } (i, j, k) \text{ je } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ nebo } (2, 1, 3) \\ 0 & \text{jinak: } i = j \text{ nebo } j = k \text{ nebo } k = i \end{cases}$$

Vektorový součin vektorů  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ , vektor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right),$$

s použitím Einsteinovy sumační konvence a Levi-Civitova symbolu má pak tvar

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3 = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i a_j b_k.$$

Diferenciální operátor *Hamiltonův operátor nabla* se využívá k symbolickému zápisu dále uváděným matematických operátorů.

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

## 1.1 Operátor rotace

**Definice 1.1.** *Rotací vektoru  $\mathbf{a}$  nazýváme vektor*

$$\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \left( \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}.$$

Použitý symbol  $\times$  označuje operaci vektorového součinu dvou vektorů, pro kterou neplatí komutativní zákon a výsledný vektor je kolmý k daným dvěma vektorům.

Vírový pohyb tekutin lze charakterizovat a popsat pomocí rotace jejich rychlostí v daných objemech.

Vektorové pole se nazývá nevířivé (potenciální), jestliže se rotace vektoru jeho rychlosti ve zkoumaném objemu rovná nulovému vektoru ( $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$ ). Pokud je v daném objemu  $\text{rot } \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , pak dané proudění nazýváme vírovým. Můžeme o něm říci, že jeho úhlová rychlost  $\boldsymbol{\omega}$  odpovídá polovině úhlové rychlosti otáčení tekutiny v okolí určitého místa

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{a} = 2\boldsymbol{\omega}.$$

$\boldsymbol{\Omega}$  se nazývá *vířivost*, někdy také *vír rychlosti*.

**Příklad 1.2.** *Mějme proudové pole tekutiny, jehož vektor rychlosti je rovnoběžný s osou  $x$  a jeho velikost roste přímo úměrně se vzdáleností od roviny  $O_{xy}$ . Najděte pole vířivosti příslušného tomuto poli. [6]*

Vektor rychlosti  $\mathbf{v}$  má tvar

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (cz, 0, 0),$$

kde  $c$  je konstanta, a má směr osy  $x$ . Využitím definice vířivosti

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ cz & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozepsáním matice rotace získáme složky vířivosti

$$\Omega_x = \frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial 0}{\partial z} = 0 \quad \Omega_y = \frac{\partial cz}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x} = c \quad \Omega_z = \frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} = 0.$$

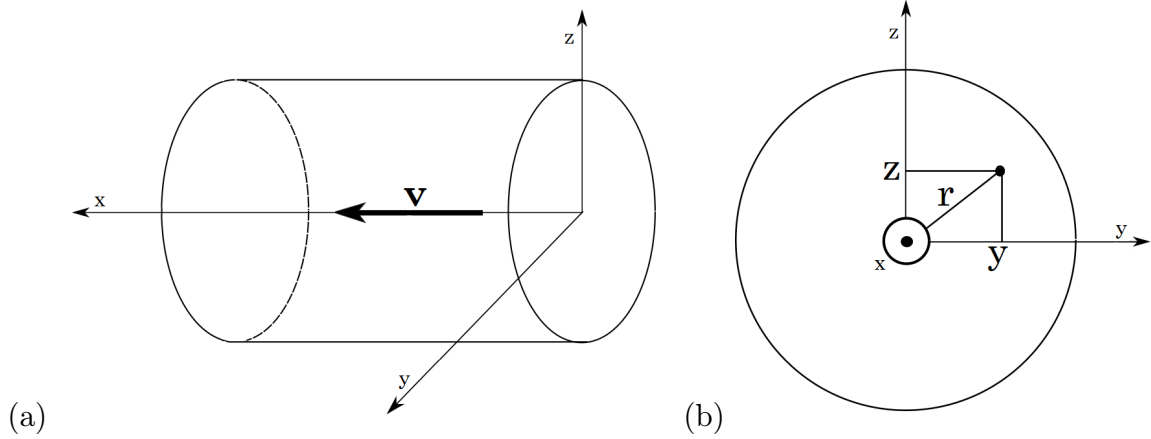
Pole vířivosti je homogenní o vířivosti  $\boldsymbol{\Omega} \equiv (0, c, 0)$ .

◇

**Příklad 1.3.** V trubici o průměru  $R$  se vytvořilo Poiseuilleovo proudění s rozložením rychlosti

$$v = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta l} (R^2 - r^2)$$

v průřezu.  $\mu$  je dynamická viskozita,  $\delta p$  je tlakový spád na úseku  $\Delta l$  potrubí a  $r$  je vzdálenost uvažovaného bodu od osy potrubí. Najděte rozložení vířivosti v tomto proudovém poli.[6]



Obrázek 1.1: (a) Znázornění orientace os soustavy souřadnic v trubici. (b) Znázornění roviny kolmé na osu trubice.

Soustavu souřadnic zvolíme tak, že osa  $x$  leží v ose potrubí a osy  $y$  a  $z$  leží v rovině kolmé na osu  $x$  (obrázek 1.1 (a)). Vzdálenost bodu ležícího v průřezu trubice od osy  $x$  je

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Vektor rychlosti můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{v} \equiv (v; 0; 0).$$

Vířivost vypočítáme pomocí definice

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Omega_x = \frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial 0}{\partial z} = 0 \quad \Omega_y = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x} = \frac{-2y}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta l} \quad \Omega_z = \frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{-2z}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta l}.$$

Získaný tvar vířivosti  $\boldsymbol{\Omega}$

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \left( 0; \frac{-2y}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta l}; \frac{2z}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta l} \right).$$

◇

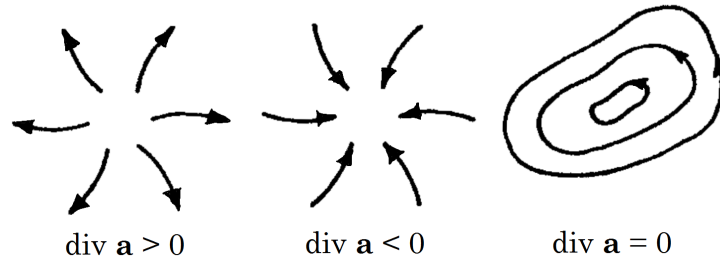
## 1.2 Operátor divergence

**Definice 1.4.** *Divergencí vektoru  $\mathbf{a}$  nazýváme skalár*

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

Uvažujeme-li stacionární proudění kapaliny, kterou můžeme charakterizovat vektorem rychlosti  $\mathbf{a}(x, y, z)$ , pak divergence vektoru  $\mathbf{a}$  znamená (objemové) množství kapaliny, která vyteče z jednotkového objemu za jednotku času.

Pro nestlačitelnou kapalinu, někdy označovanou jako nezřídlovou, platí  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ . Tok vektorového pole, jehož divergence je nulová, je také nulový. Znamená to, množství kapaliny, které vtéká uzavřenou plochou daného objemu, se rovná objemu, který touto plochou vytéká. Můžeme říct, že proudnice (siločáry) takového kontinua nemají nikde ve zkoumaném objemu zdroje. Pokud  $\mathbf{a} \neq 0$ , platí, že v daném objemu se nachází zřídlo a můžeme rozhodnout o jeho vydatnosti. Pokud platí  $\operatorname{div} \mathbf{a} > 0$ , znamená to, že v daném objemu dochází k přírůstku kapaliny - nachází se v něm zřídlo toku. Pokud platí  $\operatorname{div} \mathbf{a} < 0$ , znamená to, že v daném objemu dochází k úbytku kapaliny - nachází se v něm propad toku.



Obrázek 1.2: Kvalitativní průběh proudnic kontinua: a) objem se zřídlem, b) objem s propadem, c) vířivé proudění. [11]

**Příklad 1.5.** *Ověřte nezřídlovost nestlačitelné kapaliny v oblasti s vektorovým rychlostním polem*

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right),$$

kromě počátku souřadnicové soustavy  $(0, 0, 0)$ .

Nepřítomnost zřídla ve zkoumaném objemu dokážeme pomocí rovnice  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \\ &= \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} > 0 \end{aligned}$$

Výpočtem jsme vyvrátili nepřítomnost zřídla, což vyplývá z nenulovosti divergence rychlostního pole. Nepřímo jsme tedy dokázali, že se v libovolně zvoleném objemu nachází zřídlo.  $\diamond$



## 1.3 Operátor gradient

Gradient lze chápat jako operaci, která určí směr a velikost růstu (změny) skalárního pole. Daný výsledek získáme ve formě vektorového pole. V mechanice kontinua se využívá gradientu funkce při zjišťování vlastností a stavů kontinua ve zkoumaném objemu.

Operátor gradient lze aplikovat i na vektorové a tenzorové pole. Jeho použití zvýší řád o jedna. Skalární veličina se stane vektorem, vektor se stane tenzorem 2. řádu a tenzor zvýší svůj řád o 1.

Funkcí

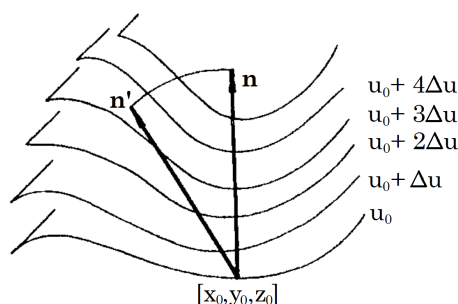
$$u = f(x, y, z)$$

je dáno v oblasti  $O$ , na níž je funkce definována, skalární pole. Množina bodů s danou konstantní hodnotou funkce  $u_i = \text{konst.}$ , nazýváme *ekvipotenciální plochou (hladinou)* daného pole.

**Definice 1.6.** Vektor

$$\text{grad } u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$$

se nazývá *gradient* daného skalárního pole.



Obrázek 1.3: Ekvipotenciální plochy skalárního pole. [11]

K ekvipotenciální ploše lze sestavit v bodě  $[x_0, y_0, z_0]$ , kterým hladina prochází, jednotkový normálový vektor  $\mathbf{n}$ . Skalární pole tedy v každém bodě udává určitý významný směr, který zároveň udává směr největší změny (největšího zhuštění) ekvipotenciálních ploch. V normálovém směru protne jednotkový vektor maximální počet okolních hladin, než jednotkový vektor jiného směru (obrázek 1.3). V 2D modelu zemského povrchu můžeme za skalární pole považovat pole výšek, vrstevnice odpovídají hladinám (křivkám) a normály na ně pak udávají směr největšího výškového stoupání v daném místě. [11]

S operátor gradient se setkáváme například při popisování a modelování difuze. V jedno z možných modelů difuze jsou používány 2 Fickovi zákony, které předpokládají difuzi jako pozorovatelný pohyb. 2 popisující veličinou jsou v nich koncentrace  $c$  a čas  $t$ . Sílu, která vykonává pohyb, je v tomto případě považován gradient koncentrace. 1. Fickův zákon zní  $\mathbf{j} = -D \text{grad } c$ , kde  $\mathbf{j}$  je difuzní tok,  $D$  je difuzní součinitel pro daný materiál a znaménko mínus je dáno opačným směrem difuze (z místa s největší koncentrací ve směru k místu s nejmenší koncentrací) proti gradientu, který udává směr největšího růstu (koncentrace). Pro  $D = \text{konst.}$  zní 2. Fickův zákon

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

Množina gradientů ve všech jednotlivých bodech skalárního pole vytváří vektorové pole. Pokud známe vektorové pole a existuje funkce  $u = f(x, y, z)$ , pro kterou platí, že každý vektor lze vyjádřit v uvažovaném bodě jako gradient této funkce,

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \text{grad } u(x, y, z),$$

pak pole nazveme *potenciální (konzervativní)*. V tomto poli, práce, kterou vykoná síla  $\mathbf{a} = \text{grad } u$  po křivce spojující body A a B nezávisí na tvaru či délce křivky.

$$\int_A^B \mathbf{a} \, d\mathbf{k} = \int_A^B \text{grad } u \, d\mathbf{k} = \int_A^B \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = \int_A^B du = u(B) - u(A). \quad (1.1)$$

Pro uzavřenou křivku můžeme dokonce říci, že platí

$$\oint \text{grad } u \, ds = 0.$$

**Příklad 1.7.** Dokažte nezávislost gradientu vektorového pole  $\mathbf{pr}$  na polohovém vektoru  $\mathbf{r}$ , kde  $\mathbf{p} = \text{konst.}$  [1]

Rozepsáním operace gradient dojdeme k výsledku

$$\text{grad } (\mathbf{pr}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (p_j r_j) = p_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = p_j \delta_{ij} = p_i,$$

který dokazuje, že námi zadané vektorové pole nezávisí na polohovém vektoru  $\mathbf{r}$ .  $\diamond$

**Příklad 1.8.** Určete směr největšího růstu teploty vzduchu pro zjednodušený model s funkcí  $T(x, y, z) = 300 e^{-(x^2+y^2+z^2)}$  (s rostoucí vzdáleností od počátku teplota exponenciálně klesá).

Daný úkol budeme řešit pomocí operace gradient aplikovaný na skalární teplotní pole.

$$\text{grad } T(x, y, z) = \frac{\partial T(x_i)}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = -600x e^{-(x^2+y^2+z^2)} \mathbf{i} - 600y e^{-(x^2+y^2+z^2)} \mathbf{j} - 600z e^{-(x^2+y^2+z^2)} \mathbf{k}.$$

Vyplývá tedy, že při přibližování k počátku souřadnicového systému se rychlost růstu teploty zvyšuje.  $\diamond$

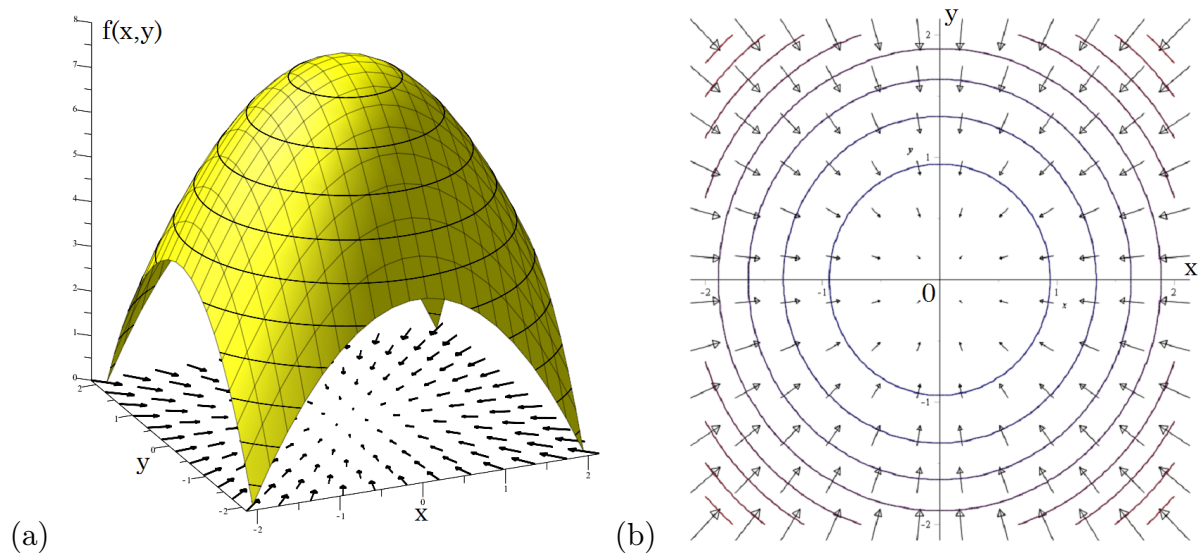
Operátor gradient lze vyjádřit v různých souřadných soustavách.

Válcová soustava souřadnic

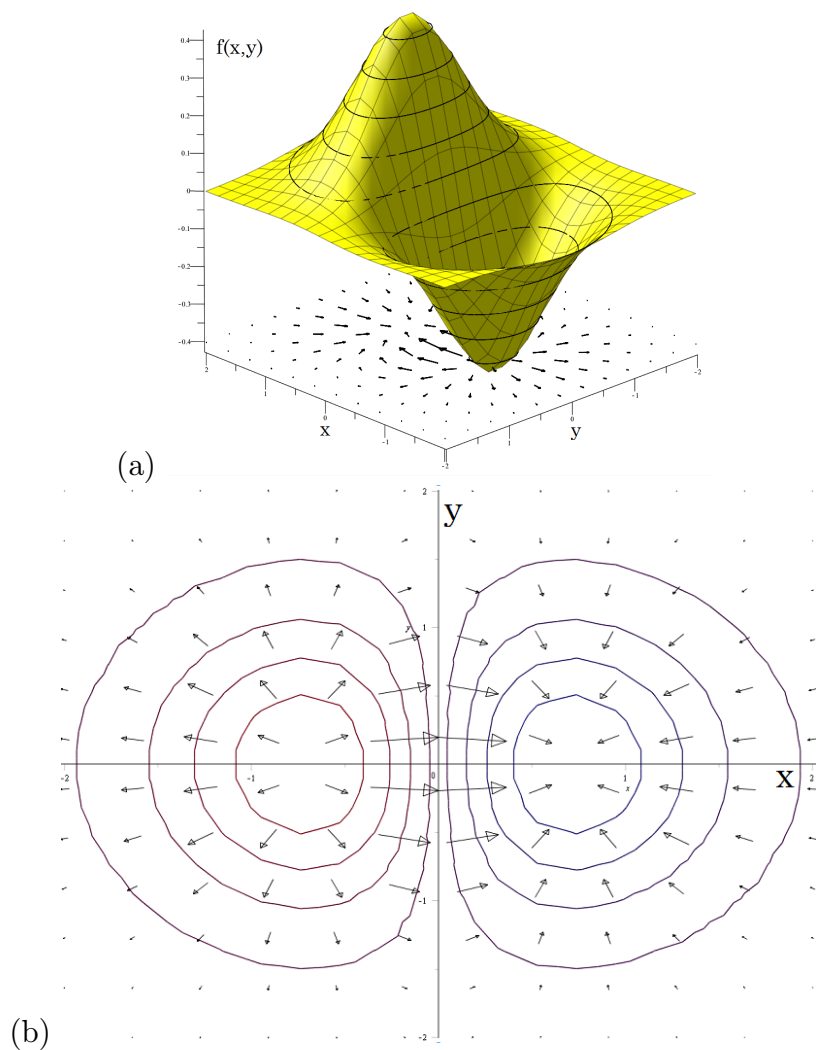
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}.$$

Sférická soustava souřadnic

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}.$$



Obrázek 1.4: Gradient funkce  $f(x, y) = -(x^2 + y^2) + 8$  s ekvipotenciálními křivkami.



Obrázek 1.5: Gradient funkce  $f(x, y) = x e^{-x^2 - y^2}$  s ekvipotenciálními křivkami.

# Kapitola 2

## Gauss-Ostrogradského věta

Tok vektorového pole  $\mathbf{A}(x, y, z)$  zavedeme plošným integrálem

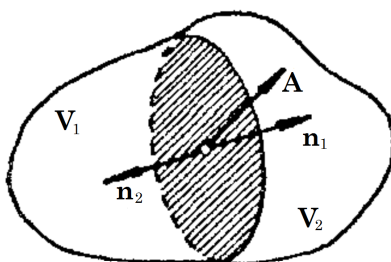
$$\phi = \iint_S \mathbf{A} \, d\mathbf{S}.$$

Pro uzavřenou plochu  $S$  ohraničující objem  $V$ , definujeme tok  $\phi$  uzavřenou plochou  $S$ , jako

$$\phi = \oiint_S \mathbf{A} \, d\mathbf{S}.$$

Objem  $V$  rozdělíme přepážkami na  $N$  menších objemů  $V_i$ . Určíme toky pole  $\phi_i$  plochami  $S_i$ , které ohraničují jednotlivé  $V_i$ , a vypočítáme jejich sumu. Zjistíme však, že suma vnitřních toků přepážkami je rovna nule, protože při sčítání toků sousedních objemů jsou toky stejně velké, ale s opačnými znaménky, díky opačným orientacím normál plochy (obrázek 2.1). Součet toků přes jednotlivé objemy lze tedy vyjádřit jako

$$\sum_{i=1}^N \phi_i = \sum_{i=1}^N \oiint_{S_i} \mathbf{A}_i \, d\mathbf{S}_i = \phi. \quad (2.1)$$



Obrázek 2.1: Sčítání toků vektorového pole uzavřenými sousedními plochami ohraničujícími dílčími objemy. [11]

Úpravou rovnice (2.1) získáme sumu

$$\phi = \oiint_S \mathbf{A} \, d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \phi_i = \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i}{V_i} V_i. \quad (2.2)$$

Při pokračování dělení objemů  $V_i$  dalšími přepážkami vytvoříme pro libovolný bod  $[x, y, z]$  z  $V$  posloupnost neomezeně se zmenšujících objemů, které daný bod obsahují. Můžeme tedy nahradit sumu podílu limitou podílu, která odpovídá divergenci pole  $\mathbf{A}$

$$\lim_{V_i^{[x,y,z]} \rightarrow 0} \frac{\phi_i^{[x,y,z]}}{V_i^{[x,y,z]}} = \operatorname{div} \mathbf{A}.$$

Sumu v rovnici (2.2) můžeme nahradit integrálem přes objem  $V$  a získat vztah nazývaný *Gauss-Ostrogradského věta* [11]

$$\oint_S \mathbf{A} \, d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV. \quad (2.3)$$

**Věta 2.1** (Gauss-Ostrogradského věta). *Nechť funkce*

$$P(x, y, z), \quad Q(x, y, z), \quad R(x, y, z) \quad \text{a} \quad \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial z}$$

*jsou spojité v uzavřeném tělese  $\overline{V}$ , jehož hranici tvoří konečný počet jednoduchých konečných po částech hladkých ploch, (které nemusí být nutně jednoduše souvislé) s orientovanou hranicí  $S$ . Vnější normála  $\mathbf{n}$ , příslušná vnější straně hranice  $S$ , nechť má obvyklý směr vně tělesa. Pak*

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \iint_S (P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy), \quad (2.4)$$

*nebo označíme-li  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  směrové kosiny (orientované) vnější normály,*

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS, \quad (2.5)$$

*resp. uvážíme-li, že  $\frac{\partial x}{\partial n} = \cos \alpha$  atd.*

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \iint_S \left( P \frac{\partial x}{\partial n} + Q \frac{\partial y}{\partial n} + R \frac{\partial z}{\partial n} \right) dS. \quad (2.6)$$

*Přitom je-li  $V$  vícerozměrné souvislé těleso, znamená  $\iint_S$  součet plošných integrálů přes jednotlivé části hranice.*

**Poznámka 2.2.** Předchozí rovnice z věty lze zapsat v symbolice vektorové analýzy takto:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}P + \mathbf{j}Q + \mathbf{k}R, \quad d\mathbf{S} = \mathbf{i} \, dS \cos \alpha + \mathbf{j} \, dS \cos \beta + \mathbf{k} \, dS \cos \gamma, \quad dV = dx \, dy \, dz,$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV &= \iint_S \mathbf{A} \, d\mathbf{S}, \\ \iiint_V \operatorname{rot} \mathbf{A} \, dV &= \iiint_V \nabla \times \mathbf{A} \, dV = - \iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} \, dS = - \iint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}, \end{aligned}$$

pro skalární pole s funkcí  $u = f(x, y, z)$  definovanou na oblasti  $V$

$$\iiint_V \operatorname{grad} u \, dV = \iiint_V \nabla u \, dV = \iint_S u \, \mathbf{n} \, dS = \iint_S u \, d\mathbf{S}.$$

## 2.1 Aplikace

Gauss-Ostrogradského věta je používáný matematický nástroj při odvozování fyzikálních zákonů, rovnic či vztahů. Převádí působení pole z plochy  $S$  na zkoumaný objem  $V$  a naopak, kde  $S$  je hranice objemu  $V$ .

S použitím věty se můžeme setkat v různých vědních a technických oborech. Například:

Vodní hospodářství - transport toků rozpuštěných látek ve vadózních zónách (zóny v horninách, které mají část póru zaplněných vzduchem); vodohospodářské úlohy proudění.

Termodynamika - 1. termodynamický zákon odvozen ze zákona zachování energie v kontinuu, viz kapitola 2.3;

Rovnice pro změnu entropie odvozena z 2. termodynamického zákona: pro nevratné děje platí

$$dS > \frac{\delta Q}{T},$$

což znamená, že entropie  $S$  izolovaného systému při nevratných dějích roste. Zavedeme disipativní procesy, které ukazují, kolik energie se nevratně změní na vnitřní energii mikroskopických pohybů a interakcí, jako

$$TdS - \delta Q = \delta Q^*.$$

Pro dostatečně malý zkoumaný objem a infinitesimální časový interval  $dt$ , můžeme teplotu považovat za konstantní.

$$T \frac{d}{dt} \iiint_V \rho s dV = - \oint_S \mathbf{q} d\mathbf{S} + \iiint_V D dV,$$

kde  $s$  je měrná entropie,  $\mathbf{q}$  je hustota tepelného toku a  $D$  je disipativní funkce vyjadřující energii disipovanou v objemové jednotce za jednotku času. Využitím Gauss-Ostrogradského věty převedeme plošné integrály na objemové a integrováním, získáme tvar rovnice pro změnu entalpie

$$\rho \frac{ds}{dt} = - \frac{\text{div} \mathbf{q}}{T} + \frac{D}{T},$$

kde znaménko mínus u prvního členu rovnice vpravo je způsoben opačnou orientací směru tepelného toku a vnější normály plochy  $S$ . [4]

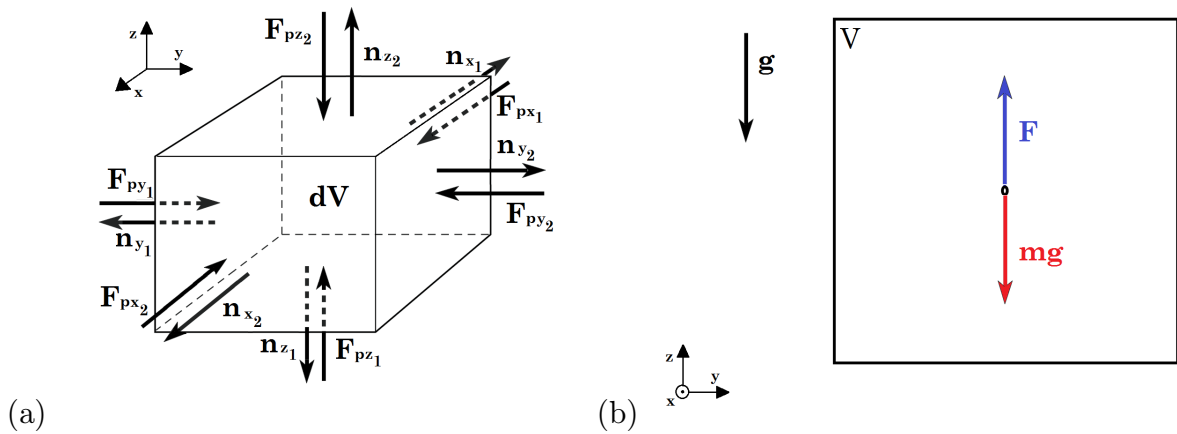
Hydrostatika - Eulerova rovnice hydrostatiky, Gauss-Ostrogradské věta převádí tlakovou složku síly působící na plochu na objemovou

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho \mathbf{a} dV - \iint_S p d\mathbf{S} &= 0 \\ \iiint_V \rho \mathbf{a} dV - \iiint_V \text{grad} p dV &= 0; \end{aligned}$$

*Archimédův zákon*: výslednice plošných sil  $F$  (tlakové síly) působící na těleso ponořené do tekutiny odpovídá opačně orientované tíhové síle objemu tekutiny tělesem vytlačené

$$\mathbf{F} = - \oint_S p d\mathbf{S} = - \iiint_V \text{grad} p dV = - \iiint_V \rho \mathbf{g} dV = -m \mathbf{g},$$

kde  $m$  je hmotnost vytlačené tekutiny, pro ideální tekutinu v homogenním gravitačním poli ( $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ ), s využitím rovnice mechanické rovnováhy  $\text{grad} p = \rho \mathbf{f}$  a Gauss-Ostrogradského věty. Znaménko mínus je způsobeno orientací tlakové síly, která je definována ve směru vnitřní normály plochy  $S$ .



Obrázek 2.2: (a) Působení tlakové síly na elementární objem  $dV$ . (b) Působení tlakové a tíhové síly na objem  $V$ .

Hydrodynamika - Eulerovy rovnice pro proudění ideální tekutiny, kde je využita k převodu plošné tlakové síly na objemovou, jako jsou složky sil hmotnostních a setrvačných. Viz kapitola 2.2.

V medicíně je už několik tisíciletí využíváno působení léčebných metod na část kůže, plochy, k léčení projevů nemoci v těle, objemu. Například léčba magnetickým polem, ionizací, laserovým paprskem, akupunktura, akupresura. Metodika a principy některých z těchto metod byly utvářeny zkušenostmi léčitelů. V moderní medicíně se k určování dávek ozáření polem či paprskem využívá výpočetní technika a matematické modely, které mohou nasimulovat danou situaci a zabránit poškození plochy kůže a vnitřní tkáně, a zároveň docílit chtěného výsledku v léčbě. [8]

Jako příklady využití Gauss-Ostrogradského věty jsou dále uvedeny odvození rovnice kontinuity proudění, 1. termodynamické věty a Eulerovy rovnice pro ideální tekutinu. [1] [2] [4]

## 2.2 Rovnice kontinuity proudění

Rovnice kontinuity proudění vychází ze zákona zachování hmotnosti. Může být nahrazena libovolnou spojitě rozloženou fyzikální veličinou s hustou  $\rho$  a hustotou toku  $\mathbf{j}$  (např. hustota elektrického náboje a hustota elektrického proudu). Předpokládáme neměnnost hmotnosti hmotných bodů během pohybu.

Přes  $v$  v prostoru pevně danou uzavřenou plochu  $S$  proudí kontinuum. Hmotnost kontinua, která vyteče za jednotku času z objemu  $V$  přes plochu  $S$ , určuje integrál

$$\frac{\partial m'}{\partial t} = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \rho \mathbf{v}_i \mathbf{n}_i dS, \quad (2.7)$$

kde  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor vnější normály plochy. Vektor  $\rho \mathbf{v}$  udává hmotnost kontinua prošlého průřezem kolmým ke směru rychlosti  $\mathbf{v}$  za jednotku času. Hmotnostní tok se zavádí jako tok  $\rho \mathbf{v}$  plochou  $S$

$$\mathbf{j} = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Změnu hmotnosti  $\frac{\partial m}{\partial t}$  za jednotku času v objemu  $V$  vyjádříme pomocí hmotnosti

kontinua  $m$  v objemu  $V$ ,

$$m = \int_V \rho \, dV,$$

jako

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV. \quad (2.8)$$

Pro nestlačitelné kontinuum,  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , platí

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{\partial m'}{\partial t},$$

to znamená, že velikost změny hmotnosti vstupujícího kontinua odpovídá změně hmotnosti vystupujícího za jednotku času v objemu  $V$ .

Porovnáním rovnic (2.7) a (2.8) dostáváme

$$\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV. \quad (2.9)$$

Využitím Gauss-Ostrogradského věty převedeme plošný integrál rovnice (2.9) na objemový. Objem  $V$  je v prostoru stálý, nezávislý v čase, a proto můžeme zaměnit pořadí derivování a integrování pravé strany rovnice (2.8). Tato rovnice má pak tvar

$$\int_V \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} \, dV = \int_V \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \, dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV.$$

Daný objem  $V$  byl zvolen libovolně ve zkoumaném kontinuu, proto bude rovnice splněna pro jakýkoliv objem  $V$  a bude platit

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0, \quad (2.10)$$

což bude platit jen pokud v každém bodě kontinua platí

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.11)$$

Rovnice (2.11), která platí ve všech bodech kontinua, je *obecnou formulací rovnice kontinuity proudění*.

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \text{resp.} \quad \operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad (2.12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (2.13)$$

Rovnice (2.12) jsou ekvivalentní zápisy *rovnice kontinuity proudění v diferenciálním tvaru*. Rovnice (2.13) je rovnicí kontinuity proudění s hustotním tokem hmotnosti  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ . [4] [7]

**Příklad 2.3.** 2-D rychlostní pole nestlačitelné kapaliny je určeno ve směru osy  $y$  rovnicí

$$v_y = x^2 y - 5xy.$$

Určete rovnici složky rychlosti  $v_x$  ve směru osy  $x$ .



Vyjdeme z rovnice kontinuity (2.12) pro proudění tekutiny

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Pro nestlačitelnou tekutinu platí  $\rho = \text{konst.}$  a z toho plyne  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ . Dostaneme tedy tvar rovnice kontinuity

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

pro 2-D proudění.

Dosazením a úpravami získáme parciální derivaci  $\frac{\partial v_x}{\partial x}$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + (x^2 - 5x) = 0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 5x - x^2.$$

Složku rychlosti  $v_x$  získáme integrací složky totálního diferenciálu  $dv_x$

$$\int dv_x = \int 5x - x^2 dx$$

$$v_x = \frac{15x^2 - 2x^3}{6}.$$

◇

## 2.3 1. termodynamická věta

1. termodynamická věta je speciální formulací *zákona zachování energie*, který zní: Celková energie izolované soustavy zůstává konstantní při všech dějích, které v ní probíhají. Znění zákona zachování mechanické energie, kterou budeme dále využívat, je: Jestliže těleso nebo mechanický systém nepodléhá účinkům okolí, pak součet kinetické a potenciální energie částic, z nichž se daná soustava skládá, zůstává stálý.  $E_K + E_P = \text{konst.}$ , kde  $E_K = \frac{1}{2}mv^2$  je kinetická energie a  $E_P = mu$  je potenciální energie sil krátkého dosahu, kde  $u$  je měrná vnitřní energie látky připadající na jednotku hmotnosti.

Pro pohybující se objem  $V$  kontinua se kinetická a potenciální energie mění v závislosti na práci objemových sil ve zkoumaném objemu, práci konající plošné síly na hranici objemu  $S$  a tepelné výměně, proudění energie přes hranici.

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) dV = \iiint_V \rho \mathbf{v} \mathbf{f} dV + \oint_S \boldsymbol{\varphi} \mathbf{v} dS - \oint_S \mathbf{q} dS. \quad (2.14)$$

$\mathbf{f}$  je časově proměnné vektorové pole (např. u gravitačního pole platí  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ ), plošná síla  $\boldsymbol{\varphi}$  působící na objem kontinua jen přes plochu  $S$  a vektor hustoty tepelného toku  $\mathbf{q}$ , jehož velikost udává množství energie, procházející za jednotku času jednotkovou plochou kolmou na směr šíření energie, znaménko minus je v posledním členu na pravé straně rovnice (2.14) proto, že normála k ploše  $S$  míří ven z objemu  $V$ .

Provedením derivování levé strany rovnice (2.14) a využitím Gauss-Ostrogradského věty, při převádění levé strany rovnice na objemový integrál, dostaneme

$$\iiint_V \left( \rho \mathbf{v} \mathbf{a} + \rho \frac{du}{dt} \right) dV = \iiint_V \left[ \rho \mathbf{v} \mathbf{f} + (\tau_{ik} v_i)_{,k} - \operatorname{div} \mathbf{q} \right] dV, \quad (2.15)$$

kde  $\mathbf{a}$  je zrychlení kontinua,  $\tau_{ik}$  je pole *tenzoru napětí* a platí  $\varphi_i = \tau_{ik}n_k$ . Díky tomu, že objem můžeme zvolit libovolně, můžeme rovnici upravit na

$$\rho \mathbf{v} \mathbf{a} + \rho \frac{du}{dt} = \rho \mathbf{v} \mathbf{f} + (\tau_{ik} v_i)_{,k} - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (2.16)$$

Rozepsáním členů součtu v levé části rovnice (2.16)

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v} \mathbf{a} &= \rho v_i \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial v^2}{\partial t} + \operatorname{div} v^2 \mathbf{v} - v^2 \operatorname{div} \mathbf{v} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \rho v^2}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v^2 \mathbf{v} \right) - \frac{1}{2} v^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

a

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} u \right) = \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div} \rho u \mathbf{v} - u \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right), \quad (2.18)$$

upravíme rovnici (2.16), s využitím rovnice kontinuity (2.12), na tvar

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \rho v^2}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v^2 \mathbf{v} \right) - \underbrace{\frac{1}{2} v^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right)}_{=0} + \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div} \rho u \mathbf{v} - \underbrace{u \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right)}_{=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) + \operatorname{div} \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{v} \mathbf{f} + (\tau_{ik} v_i)_{,k} - \operatorname{div} \mathbf{q} \\ &\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) = -\operatorname{div} \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) \mathbf{v} \right] + \rho \mathbf{v} \mathbf{f} + (\tau_{ik} v_i)_{,k} - \operatorname{div} \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Druhý člen na pravé straně rovnice (2.16) můžeme rozepsat

$$(\tau_{ik} v_i)_{,k} = \tau_{ik,k} v_i + \tau_{ik} \eta_{ik},$$

kde  $\eta_{ik}$  jsou složky *tenzoru rychlosti deformace* definovaný

$$\eta_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

Rovnici (2.16) můžeme rozdělit na 2 části, pohybovou rovnici

$$\rho \mathbf{v} \mathbf{a} = \rho \mathbf{v} \mathbf{f} + \tau_{ik,k}$$

a rovnici pro změnu vnitřní energie

$$\rho \frac{du}{dt} = \tau_{ik} \eta_{ik} - \operatorname{div} \mathbf{q}, \quad (2.20)$$

kterou lze pomocí rovnice (2.18) upravit na

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) = -\operatorname{div} \rho u \mathbf{v} + \tau_{ik} \eta_{ik} - \operatorname{div} \mathbf{q}.$$

Integrací rovnice (2.20) získáme

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho u dV = \iiint_V \tau_{ik} \eta_{ik} dV - \oint_S \mathbf{q} dS, \quad (2.21)$$

což je po vynásobení  $dt$  znění 1. *termodynamické věty*

$$dU = \delta A + \delta Q.$$

$dU$  udává změnu vnitřní energie, která byla dosažena vykonáním práce  $\delta A$  a přivedením tepla  $\delta Q$  ( $A$  a  $Q$  nejsou stavovými veličinami, proto využití symbolu  $\delta$ ). [4]

## 2.4 Eulerovy rovnice proudění ideální tekutiny

Pohyb soustav hmotných bodů se řídí 1. impulzovou větou, která říká, že časová změna úhrnné hybnosti soustavy se rovná součtu vnějších sil na ní působících.

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV = \iiint_V \rho \mathbf{a} dV = \mathbf{F}, \quad (2.22)$$

kde  $\mathbf{F}$  se rovná součtu sil dlouhého dosahu, objemové síly

$$\mathbf{F}_I = \iiint_V \rho \mathbf{f} dV, \quad (2.23)$$

a sil krátkého dosahu, plošné síly

$$\mathbf{F}_{II} = \oiint_S \varphi dS. \quad (2.24)$$

Rovnici (2.22) upravíme dosazením součtu rovnic (2.23) a (2.24) na tvar

$$\iiint_V \rho \mathbf{a} dV = \iiint_V \rho \mathbf{f} dV + \oiint_S \varphi dS, \quad (2.25)$$

kterou použitím Gauss-Ostrogradského věty převedeme na součet objemových integrálů na tvar

$$\iiint_V \rho a_i dV = \iiint_V \rho f_i dV + \iiint_V \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} dV, \quad (2.26)$$

pro libovolný objem  $V$ , a tedy získáváme *pohybovou rovnici kontinua*

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2.27)$$

*Ideální tekutina* je takové kontinuum, v němž v klidu ani za pohybu nepůsobí smykové síly. Můžeme tedy říci, že tenzor napětí  $\tau_{ik} = -p\delta_{ik}$ . Další základní vlastnost ideální tekutiny je platnost *Pascalova zákona*, který stanovuje rovnost normálních tlaků v celém zkoumaném objemu. K popisu pohybu reálných tekutin s velmi malou viskozitou (vnitřní tření) se využívá ke zjednodušení model ideální tekutiny. Pohybové rovnice pro ideální kapalinu se nazývají *Eulerovy rovnice*.

V rovnici (2.26) můžeme upravit složku plošné síly na

$$\iiint_V \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} dV = - \iiint_V \frac{\partial p \delta_{ik}}{\partial x_k} dV = - \iiint_V \text{grad } p dV$$

a, pokud mají objemové síly potenciál  $U$  (např. gravitační pole), složku objemové síly na tvar

$$\iiint_V \rho \mathbf{f} dV = -\rho \iiint_V \text{grad } U dV,$$

kde znaménko mínus je zvoleno proto, abychom práci konanou vnějšími silami proti silám pole zvyšovali potenciální energii částice. Upravená rovnice (2.26) má tvar

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\rho \text{grad } U - \rho \text{grad } p. \quad (2.28)$$

Úpravou získáme tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\text{grad } U - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2.29)$$

Pro izoentropický pohyb, nedochází při něm k tepelné výměně s okolím, můžeme psát

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\text{grad } (h + U),$$

kde  $h = \iiint_V \frac{dp}{\rho(p)} dV$  je entalpie jednotky hmotnosti.

Využitím vzorce

$$\frac{1}{2} \text{grad } v^2 = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v},$$

získáme tvar Eulerových rovnic

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = -\text{grad } (h + U). \quad (2.30)$$

Při použití operace rot na rovnici (2.30) získáme tvar Eulerových rovnic pouze v závislosti na rychlosti  $\mathbf{v}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}).$$

Pro stacionární proudění (časově neměnné) platí  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$  a tedy trajektorie částic tekutiny splývají s proudnicemi.

Proudnici parametrizujeme její délkou  $l$  a skalárně vynásobíme členy rovnice (2.30) jednotkovým tečným vektorem k proudnici  $\mathbf{l}$ . Jednotlivé členy pak upravíme do tvarů

$$\mathbf{l} \text{grad } (h + U) = \frac{d(h + U)}{dl}$$

a

$$\mathbf{l} (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) = 0.$$

Rovnice (2.30) má tedy pro stacionární proudění tvar

$$\frac{d}{dl} \left( \frac{v^2}{2} + h + U \right) = 0 \quad (2.31)$$

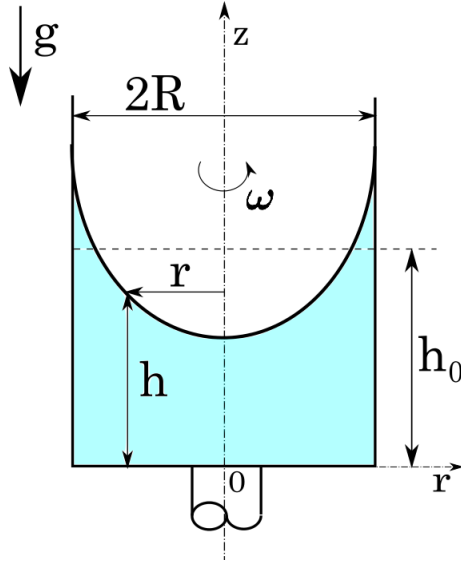
a tedy

$$\frac{v^2}{2} + h + U = \text{konst.}, \quad (2.32)$$

kterou nazýváme *Bernoulliho rovnicí*. Je možné předpokládat, že platí  $\rho = \text{konst.}$ , díky obtížné stlačitelnosti tekutiny, čímž se Bernoulliho rovnice zjednoduší na tvar [4] [6]

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = \text{konst.} \quad (2.33)$$

**Příklad 2.4.** *Těžká nestlačitelná kapalina obsažená v kolmém kruhovém válci, jehož podélná osa splývá se směrem tíže, se otáčí rovnoměrně kolem osy jako tuhý celek. Je-li kapalina v klidu, dosahuje výšky  $h_0$  nad dnem nádoby. Určete tlak kapaliny v libovolném místě integrací Eulerových pohybových rovnic.[1]*



Obrázek 2.3: Tekutina v rotující válcové nádobě.

Rychlost částice rotující tekutiny v určitém bodu můžeme vyjádřit pomocí velikosti úhlové rychlosti  $\omega$  a vzdálenosti bodu od osy rotace  $r$ , jako  $v = \omega r$ . Podle zadání je osa rotace totožná s osou  $z$  (dle obrázku 2.3). Složky rychlosti vyjádříme pomocí vztahu  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , dostaneme tedy

$$\mathbf{v} = (\omega_y z - \omega_z y)\mathbf{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\mathbf{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\mathbf{k}.$$

Pro složky úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega}$  platí  $\omega_x = \omega_y = 0$  a  $\omega_z = \omega$ , protože tekutina vykonává jen rotaci kolem osy  $z$  a proto jsou složky  $\omega_x$  a  $\omega_y$  nulové. Rozepsáním složky  $x$ , získáváme

$$v_x = 0z - \omega y = -\omega y.$$

Stejným způsobem lze získat složky vektory  $v_y$  a  $v_z$

$$v_y = \omega x$$

$$v_z = 0.$$

Vyjádřené složky rychlosti dosadíme do Eulerových rovnic (2.29), kde člen  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$  díky tomu, že se jedná o stacionární proudění. Vyjádřením

$$-\text{grad } U = -\text{grad } (0, 0, gz)$$

a

$$((\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v})_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z,$$

obdobně i pro složky  $y$  a  $z$ , můžeme určit jednotlivé Eulerovy rovnice.

$$\frac{\partial (-\omega y)}{\partial x} (-\omega y) + \frac{\partial (-\omega y)}{\partial y} \omega x + \frac{\partial (-\omega y)}{\partial z} 0 = -\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \omega x}{\partial x} (-\omega y) + \frac{\partial \omega x}{\partial y} \omega x + \frac{\partial \omega x}{\partial z} 0 = -\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial 0}{\partial x} (-\omega y) + \frac{\partial 0}{\partial y} \omega x + \frac{\partial 0}{\partial z} 0 = -\frac{\partial gz}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Po úpravách získáme jednotlivé Eulerovy rovnice

$$-\omega^2 x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\omega^2 y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Do rovnice pro úplný diferenciál tlaku dosadíme vyjádřené složky tlaků z Eulerových rovnic

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Integrací získáme rovnici

$$p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) - \rho g z + C, \quad (2.34)$$

kde  $C$  integrační konstanta.

Pokud je  $p = konst.$  můžeme z rovnice (2.34) vyjádřit rovnici rotačního paraboloidu

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) + C_1, \quad (2.35)$$

kde  $C_1 = \frac{C}{g} - \frac{p}{\rho g}$ . Konstanta  $C_1$  se rovná souřadnici  $z$  volné hladiny, což zjistíme po dosazení  $x = y = 0$ , a značíme ji  $C_1 = h$ .

Pro volnou hladinu tedy platí

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) + h. \quad (2.36)$$

Využijeme nestlačitelnost tekutiny a vyjádříme výšku volné hladiny  $h$  pomocí výšky  $h_0 = \frac{V}{\pi R^2}$  tekutiny ve válci v klidu.

$$\begin{aligned} V &= \iint z \, dx \, dy = \iint \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) + h \, dx \, dy = \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \left( \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h \right) r \, d\phi \, dr = \pi R^2 h + \frac{\pi \omega^2 R^4}{4g}, \end{aligned}$$

využili jsme převod na polární souřadnice, kde  $R$  je poloměr válcové nádoby a vzdálenost bodu od počátku soustavy souřadnic  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$h = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}. \quad (2.37)$$

Při předpokladu, že na hladinu nepůsobí žádný vnější tlak ( $p = 0$ ), plyne z rovnice (2.34) pro vrchol paraboloidu  $C = gh$  ( $x = y = 0, z = h$ ). Dosazením rovnice (2.37) získáme tvar konstanty  $C$

$$C = gh = gh_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4}$$

a rovnici (2.34) tedy můžeme upravit na tvar

$$p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) - \rho g (z - h_0) - \frac{\rho \omega^2 R^2}{4},$$

což je rovnice na výpočet tlaku v libovolném bodu kapaliny. [1]

◇

# Kapitola 3

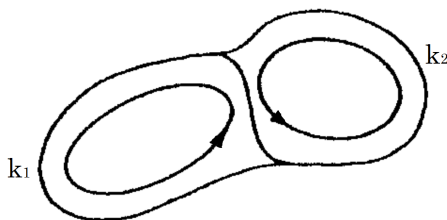
## Stokesova věta

Cirkulaci vektorového pole  $\mathbf{A}(x, y, z)$  definujeme jako křivkový integrál podél uzavřené křivky  $k$

$$\Gamma = \oint_k \mathbf{A} \, d\mathbf{k},$$

kde  $k$  tvoří hranici neuzavřené plochy  $S$ . Na této ploše můžeme vést dělicí uzavřené křivky  $k_i$  ohraničující dílčí plochy  $S_i$ , pro které určíme cirkulace pole  $\Gamma_i$ . Zjistíme však, že cirkulace podél společných hranic se navzájem vyruší, díky stejné orientaci dělicích křivek, protože danou částí křivky cirkulují v opačných směrech (obrázek 3.1). Hodnoty cirkulace v dané společné části křivky mají stejnou velikost a opačnou orientaci. Suma cirkulací tedy bude rovna jen cirkulaci podél křivky  $k$

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i = \sum_{i=1}^N \oint_{k_i} \mathbf{A}_i \, d\mathbf{l}_i = \Gamma. \quad (3.1)$$



Obrázek 3.1: Sčítání cirkulací vektorového pole podél uzavřených křivek obepínajících dílčí plochy. [11]

Úpravou rovnice (3.1) získáme sumu

$$\Gamma = \oint_k \mathbf{A} \, d\mathbf{k} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i = \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i}{S_i} S_i. \quad (3.2)$$

Zvolíme v prostoru bod  $[x, y, z]$ , kterým vedeme rovinu libovolné orientace a vymežíme na ni uzavřenou křivku  $\Gamma_i^{[x,y,z]}$  malých rozměrů, která ohraničuje dílčí plochu  $S_i^{[x,y,z]}$ , obsahující daný bod. Tuto dílčí plochu budeme dále dělit na menší části a vybereme posloupnost ploch obsahující bod  $[x, y, z]$ , čímž získáme

$$\lim_{S_i^{[x,y,z]} \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i^{[x,y,z]}}{S_i^{[x,y,z]}}.$$

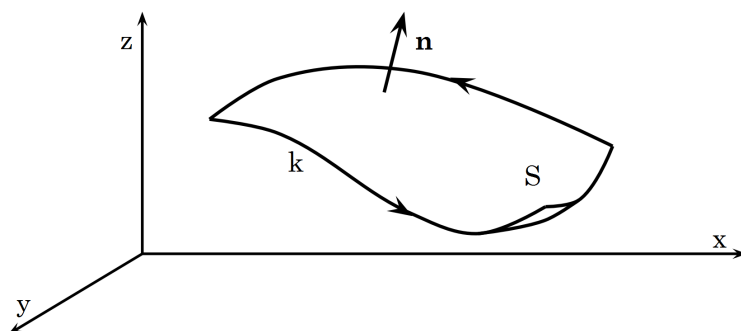
Jestliže tato limita existuje a nezávisí na dělení plochy  $S_i$ , přesto je závislá na volbě orientace roviny procházejícím bodem  $[x, y, z]$  (na její normále  $\mathbf{n}$ ). Můžeme tedy psát

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{S_i^{[x,y,z]} \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i^{[x,y,z]}}{S_i^{[x,y,z]}}. \quad (3.3)$$

Zlomek obsažený v sumě rovnice (3.2) můžeme převést na limitu (3.3) a sumu nahradit integrálem přes celou plochu  $S$ . Získaný vztah je nazýván *Stokesova věta* [11]

$$\oint_k \mathbf{A} \, ds = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \, d\mathbf{S}. \quad (3.4)$$

**Definice 3.1.** Nechť  $S$  je orientovaná plocha a nechť  $k$  je uzavřená jednoduchá konečná po částech hladká (obecně prostorová) křivka na  $S$ . Řekneme, že  $k$  je *kladně orientována vzhledem k orientované ploše  $S$* , jestliže - sledováno ze strany vnější normály (vztyčené nad vnější částí plochy) - při probíhání křivky  $k$ , po levé straně.



Obrázek 3.2: Orientace křivky  $k$  a vnější normály  $\mathbf{n}$ . [3]

**Věta 3.2** (Stokesova věta). *Nechť  $S$  je orientovaná neuzavřená plocha, jejichž okraj tvoří uzavřená jednoduchá konečná po částech hladká křivka  $k$ , kladně orientovaná vzhledem k  $S$ . Pak*

$$\begin{aligned} \oint_k (P \, dx + Q \, dy + R \, dz) = \\ = - \iint_S \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \, dy + \left( \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) dy \, dz + \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dz \, dx \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Poznámka 3.3.** Předchozí rovnici z věty lze zapsat v symbolice vektorové analýzy takto:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}P + \mathbf{j}Q + \mathbf{k}R, \quad d\mathbf{S} = \mathbf{i} \, dS \cos \alpha + \mathbf{j} \, dS \cos \beta + \mathbf{k} \, dS \cos \gamma, \quad d\mathbf{s} = \mathbf{i} \, dx + \mathbf{j} \, dy + \mathbf{k} \, dz,$$

$$\int_k \mathbf{A} \, d\mathbf{s} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \, d\mathbf{S}.$$

## 3.1 Aplikace

Fyzikální interpretace rovnice ze Stokesovy věty je taková, že tok vektoru  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  plochou  $S$  je roven cirkulaci vektoru  $\mathbf{A}$  po křivce  $k$ , ohraničující  $S$ .



S využitím Stokesovy věty se můžeme například setkat při odvozování Cauchyho zákonů mechaniky kontinua, ve kterých se jí využívá k převodu složek měrného napětí působícího na hraniční křivku plochy (odvození uvedeno v [9]). Často je využívána při odvozování zákonů a vztahů pro magnetické a elektrické pole. Například při odvozování Faradayova zákona pomocí stacionárního pole magnetické indukce  $\mathbf{B}$  a hustoty elektrického proudu  $\mathbf{i}$ . V dané oblasti platí

$$c^2 \oint_k \mathbf{B} \, d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iint_S \mathbf{i} \, d\mathbf{S},$$

kde  $c$  je rychlost světla a  $\varepsilon$  permeabilita vakua. Použitím Stokesovy věty a úpravou získáme

$$c^2 \oint_k \mathbf{B} \, d\mathbf{s} = c^2 \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iint_S \mathbf{i} \, d\mathbf{S}$$

$$\iint_S \left( c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\mathbf{i}}{\varepsilon_0} \right) d\mathbf{S} = 0.$$

Zintegrováním a úpravou získáme diferenciální tvar Faradayova zákona [11]

$$c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\mathbf{i}}{\varepsilon_0}.$$

Jako příklad využití Stokesovy věty je dále uvedeno odvození druhé Helmholtzovy věty a další vztahy pro vírové proudění tekutiny.

## 3.2 Vírové proudění

K popisování vírového proudění využíváme fyzikální veličinu *vířivost*  $\boldsymbol{\Omega}$ , výše definovanou  $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$  z vektoru rychlosti kontinua. Velikost vířivosti je přímo úměrná velikosti gradientu rychlosti. Vířivost je největší v místech s největší změnou rychlosti proudění. To nastává například v mezních vrstvách či při odtržení proudu. Nevýhodou této veličiny je fakt, že jí nelze dostatečně přesně a spolehlivě přímo změřit, a proto se její hodnoty dopočítávají pomocí rychlosti proudění.

Podle vířivosti rozdělujeme proudění na 2 typy. Při  $\boldsymbol{\Omega} = 0$  nazýváme proudění nevířivé, neboli potenciální. Pro  $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$  označujeme proudění jako vířivé a znamená to, že částice rotují kolem vlastní osy. Také platí

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\Omega} = 0,$$

což plyne z definice  $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ , kterou upravíme operací divergence na tvar

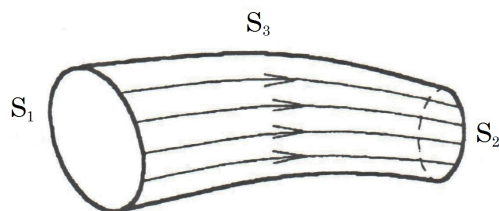
$$\operatorname{div} \boldsymbol{\Omega} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

Znamená to, že pole vírů rychlosti je polem nezřídlovým.

Křivky v poli vírů rychlosti, analogické k proudnicím v poli rychlosti, nazýváme *vírovými čarami*. Jsou definovány jako křivky, které mají v každém bodu tečný vektor odpovídající vektoru vířivosti  $\boldsymbol{\Omega}$  v daném bodu. *Vírovou trubici* definujeme, jako plochu, kterou získáme proložením všech bodů myšlené křivky ve vířivém poli. Tato trubice je analogií k proudové trubici v poli rychlosti.

*Intenzitou víru (vírové trubice)  $\mu$*  nazýváme tok vektoru  $\boldsymbol{\Omega}$  vírovou trubicí. Tok vířivosti  $\boldsymbol{\Omega}$  konečnou plochou  $S$ , kterou jsme proložili vírovou trubicí, zavedeme jako integrál

$$\mu = \iint_S \boldsymbol{\Omega} \, d\mathbf{S},$$



Obrázek 3.3: Část vírové trubice s označením ploch. [1]

a lze dokázat, že  $\mu$  nabývá stejné hodnoty ve všech průřezech vírové trubice.

Uvažujme tok vektoru vířivosti  $\mathbf{\Omega}$  uzavřenou plochou tvořenou dvěma libovolně zvolenými průřezy vírové trubice  $S_1$  a  $S_2$  a příslušnou částí plochy tvořenou příslušnými vírovými křivkami, označenou jako  $S_3$  (obrázek 3.3). Celková hodnota tohoto toku se rovná 0, toto lze dokázat pomocí využití Gauss-Ostrogradské věty, definice vířivosti  $\mathbf{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{a}$  a faktem, že vírové proudění je nezřídlové ( $\text{div } \mathbf{\Omega} = \text{div rot } \mathbf{a} = 0$ ).

$$\iint_{S_1+S_2+S_3} \mathbf{\Omega} d\mathbf{S} = \iiint_V \text{div } \mathbf{\Omega} dV = 0,$$

kde  $V$  je objem ohraničený plochami  $S_1$ ,  $S_2$  a  $S_3$ . Rozepsáním plošného integrálu na sumu jednotlivých ploch získáme rovnici

$$\iint_{S_1} \mathbf{\Omega} d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{\Omega} d\mathbf{S} + \iint_{S_3} \mathbf{\Omega} d\mathbf{S} = 0. \quad (3.6)$$

Kterou můžeme upravit díky tomu, že plocha  $S_3$  je tvořena vírovými křivkami, a tedy její integrál se bude rovnat 0, na

$$\mu_1 = \iint_{S_1} \mathbf{\Omega} d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{\Omega} d\mathbf{S} = \mu_2. \quad (3.7)$$

Udává to, že pro libovolnou část vírové trubice je intenzita víru v daném okamžiku konstantní - *druhá Helmholtzova věta*. Vyplývá, že vírová trubice je buď uzavřená nebo musí do zkoumaného objemu vstupovat i vystupovat, protože nemůže v objemu vymizet či vzniknout.

Jako další popisující fyzikální veličina je *cirkulace rychlosti*  $\Gamma$ . Je definována jako křivkový integrál tečné složky rychlosti kontinua k uzavřené křivce  $k$ ,

$$\Gamma = \oint_k \mathbf{v} d\mathbf{s}.$$

Lze odvodit z pohybové rovnice, za předpokladu objemových sil s potenciálem, že pro barotropní, splňuje  $\rho = f(p)$ , ideální tekutinu platí

$$\Gamma = \text{konst.}$$

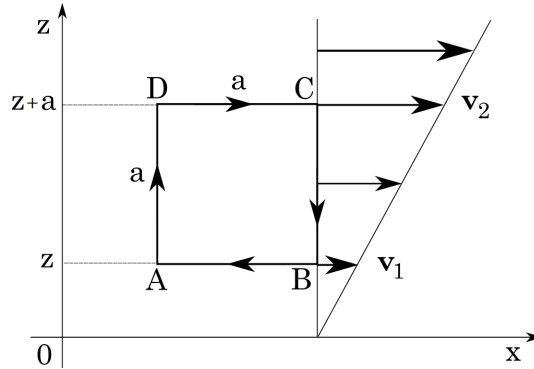
Tuto vlastnost, nazývanou *Kelvinova věta o cirkulaci*, můžeme slovně popsat takto: Působí-li na barotropní ideální tekutinu objemové síly, které mají potenciál, pak hodnota cirkulace podél libovolné tekuté křivky je časově neproměnná. [1]

Využitím Stokesovy věty nalezneme vztah mezi vířivostí a cirkulací rychlosti, jako

$$\Gamma = \oint_k \mathbf{v} d\mathbf{s} = \iint_S \text{rot } \mathbf{v} d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{\Omega} d\mathbf{S}, \quad (3.8)$$

kde křivka  $k$  ohraničuje plochu  $S$  [5]. Díky tomuto vztahu můžeme říci, že nevyskytují-li se v ideální barotropní tekutině, na níž působící síly mající potenciál, v určitý okamžik víry, pak tam nebyly v minulosti a nevytvoří se ani v budoucnosti. Jestliže platí, že v celém zkoumaném objemu v daný okamžik je  $\Omega = 0$ , pak z rovnice (3.8) plyne  $\Gamma = 0$ . Kelvinova věta nám udává, že cirkulace je konstantní celou dobu v zkoumaném objemu a proto bude nulová nezávisle na čase. Z toho plyne  $\Omega = 0$  nezávisle na čase. [1]

**Příklad 3.4.** *Mějme proudové pole tekutiny, jehož vektor rychlosti je rovnoběžný s osou  $x$  a jeho velikost roste přímo úměrně se vzdáleností od roviny  $O_{xy}$ . Najděte pole vířivosti příslušného tomuto poli. [6]*



Obrázek 3.4: Cirkulace pole kolem čtverce o straně  $a$  v rovině  $O_{xz}$ . [6]

Daný příklad je ukázkou jednorozměrného proudění ve směru osy  $x$ . V rovině  $O_{xz}$  zvolíme uzavřenou křivku  $k$ , pro zjednodušení výpočtů čtverec o straně  $a$  (obrázek 3.4). Pro ni určíme cirkulaci rychlosti  $\mathbf{v}$  v daném směru. Vyjádříme rychlosti na stranách naší zvolené čtverce. Pro stranu  $\overline{AB}$  je rychlost rovna  $v_{\overline{AB}} = cz$ , pro stranu  $\overline{CD}$  je rychlost rovna  $v_{\overline{CD}} = c(z + a)$  a pro strany  $\overline{BC}$  a  $\overline{DA}$  jsou rychlosti rovny nule díky tomu, že vektory rychlosti jsou kolmé na integrační cesty (strany čtverce).

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_k \mathbf{v} \, ds = \int_A^B v_{\overline{AB}} \, ds + \int_B^C v_{\overline{BC}} \, ds + \int_C^D v_{\overline{CD}} \, ds + \int_D^A v_{\overline{DA}} \, ds = \\ &= v_{\overline{AB}} a + 0a - v_{\overline{CD}} a + 0a = cza - c(z + a)a = -ca^2.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Znaménko mínus znamená v tomto případě, že vířivost má opačnou orientaci než plocha  $S$  ohraničená křivkou  $k$  a má tedy směr osy  $y$ .

Ze vztahu mezi cirkulací rychlosti a vířivostí (rovnice (3.8)) a rovnice 3.9 vyjádříme

$$|\Omega| = \frac{|\Gamma|}{S} = \frac{|-ca^2|}{a^2}.$$

Velikost vířivosti je tedy  $\Omega = c$ , což je stejný výsledek, jak v příkladu 1.2, počítaný pomocí operátoru rotace.  $\diamond$

# Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo přiblížit čtenáři využití jednotlivých matematických operátorů v mechanice kontinua, demonstrace využitelnosti integrálních vět při popisování a sestrojování zjednodušených modelů fyzikálních jevů.

Na úvod byl popsán operátor rotace, užívaný zejména při popisování vírového pohybu, dále operátor divergence, používaný při určování vlastností zkoumaných objemů, kterými proudí kontinuum, a gradient, určující směr největší změny (například určování směru difuze), doplněné o příklady s jejich využitím.

V 2. kapitole byla uvedena Gauss-Ostrogradského věta. Byly přiblíženy některé její aplikace a konkrétní využití této věty při odvozování rovnice kontinuity proudění, 1. termodynamické věty, Eulerových pohybových rovnic a Bernoulliovy rovnice proudění ideální tekutiny. Pomocí odvozených rovnic jsou poté vypočítané konkrétní příklady.

V poslední kapitole byla vysvětlena Stokesova věta. Byla uvedena její aplikace ve Faradayově zákoně a odvozeny některé zákonitosti a vztahy pro vírové proudění.

# Literatura

- [1] BRDIČKA, Miroslav. *Mechanika kontinua*. Vyd. 3., rev. Praha: Academia, 2005, 799 s. ISBN 80-200-1344-X.
- [2] DRÁBKOVÁ, Sylva. *Mechanika tekutin*. Vyd. 1. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita, 2007, 1 DVD-R. ISBN 978-80-248-1508-4.
- [3] HAMHALTER, Jan a Jaroslav TIŠER. *Integrální počet funkcí více proměnných*. Vyd. 2. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2005, c1997, 201 s. ISBN 80-01-03357-0.
- [4] HORSKÝ, Jan, Jan NOVOTNÝ a Milan ŠTEFANÍK. *Mechanika ve fyzice*. Vyd. 1. Praha: Academia, 2001, 412 s. ISBN 80-200-0208-1.
- [5] JÍZDNÝ, Martin. *Vlastní tvary vírového proudění*. Dostupné z: [https://www.vutbr.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=39882](https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=39882). Diplomová práce. VUT v Brně, FSI.
- [6] MACUR, Milan. *Úvod do analytické mechaniky a mechaniky kontinua*. V Brně: VUTUM, 2010, 601 s. ISBN 978-80-214-3944-3.
- [7] Mechanika tekutin: Kurz fyziky pro doktorské studium. MFF KU V PRAZE. [online]. [cit. 2015-04-03]. Dostupné z: [http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz\\_fyziky\\_pro\\_DS/display.php/kontinuum/index\\_4.php](http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/kontinuum/index_4.php)
- [8] POCHYLÝ, František a Simona FIALOVÁ. The Mathematical Basic of Interrelated Biomechanics and Mechatronics. *Engineering Mechanics: International Journal for Theoretical and Applied Mechanics*. 2005, 12(5). ISSN 1805-4633. Dostupné také z: [http://www.engineeringmechanics.cz/pdf/12\\_5\\_355.a.pdf](http://www.engineeringmechanics.cz/pdf/12_5_355.a.pdf)
- [9] POWERS, Joseph M. *Lecture Notes on Intermediate Fluid Mechanics*. University of Notre Dame. [online]. [cit. 2015-05-15]. Dostupné z: <http://www3.nd.edu/~powers/ame.60635/notes.pdf>
- [10] REKTORYS, Karel a Karel DRÁBEK. *Přehled užití matematiky*. Vyd. 4., nezměn. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1981, 1139 s.
- [11] SEDLÁK, Bedřich a Štoll IVAN. *Elektrina a magnetismus*. Vyd. 2., opr. a rozš. Praha: Academia, 2002, 632 s. ISBN 80-200-1004-1.

# Seznam použitých zkratk a symbolů

Symbol    Jednotka    Název

<b>B</b>	$[\text{A m}^{-1}]$	indukce magnetického pole
<i>c</i>	$[\text{kg m}^{-3}]$	koncentrace
<i>c</i>	$[\text{m s}^2]$	rychlost světla ve vakuu
<i>D</i>	$[\text{m}^2 \text{s}^{-1}]$	difuzní součinitel
<i>E</i>	$[\text{J}]$	energie
<i>E<sub>K</sub></i>	$[\text{J}]$	kinetická energie
<i>E<sub>P</sub></i>	$[\text{J}]$	potenciální energie
<b>F</b>	$[\text{N}]$	síla
<b>g</b>	$[\text{m s}^{-2}]$	tíhové zrychlení
<b>h</b>	$[\text{J kg}^{-1}]$	měrná entalpie
<i>h</i>	$[\text{m}]$	výška volné hladiny
<i>h<sub>0</sub></i>	$[\text{m}]$	výška volné hladiny v klidu
<b>j</b>	$[\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}]$	difuzní tok
<b>j</b>	$[\text{kg s}^{-1}]$	hmotnostní tok
<b>l</b>	$[-]$	jednotkový tečný vektor k proudnici
<i>m</i>	$[\text{kg}]$	hmotnost
<b>n</b>	$[-]$	jednotkový normálový vektor vnější normály plochy
<i>p</i>	$[\text{Pa}]$	tlak
<b>q</b>	$[\text{W m}^{-2}]$	hustota tepelného toku
<i>O<sub>xy</sub></i>	$[-]$	rovina <i>xy</i>
<i>Q</i>	$[\text{J}]$	teplo
<i>Q*</i>	$[\text{J}]$	vnitřní energie mikroskopických pohybů a interakcí
<i>R</i>	$[\text{m}]$	poloměr válcové nádoby
<i>s</i>	$[\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}]$	měrná entropie
<i>S</i>	$[\text{J K}^{-1}]$	entropie
<i>S</i>	$[\text{m}^2]$	plocha
<i>t</i>	$[\text{s}]$	čas
<i>T</i>	$[\text{K}]$	termodynamická teplota
<i>u</i>	$[\text{J kg}^{-1}]$	měrná vnitřní energie látky
<i>U</i>	$[\text{J}]$	vnitřní energie látky
<i>U</i>	$[\text{A}; \text{J kg}^{-1}]$	potenciální funkce; potenciál (magnetický, gravitační)
<b>v</b>	$[\text{m s}^{-1}]$	rychlost
<i>V</i>	$[\text{m}^3]$	objem

Symbol	Jednotka	Název
--------	----------	-------

$\delta_{ij}$	$[-]$	Kroneckerovo delta
$\varepsilon_{ijk}$	$[-]$	Levi-Civitův symbol
$\eta_{ij}$	$[\text{m s}^{-1}]$	tenzor rychlosti deformace
$\mu$	$[\text{N s m}^{-2}]$	dynamická viskozita
$\mu$	$[\text{m}^2 \text{s}^{-1}]$	intenzita víru (vírové trubice)
$\rho$	$[\text{kg m}^{-3}]$	hustota
$\tau_{ij}$	$[\text{Pa}]$	tenzor napětí
$\phi$	$[-]$	tok vektorového pole
$\varphi$	$[\text{Pa}]$	plošná síla
$\omega$	$[\text{rad s}^{-1}]$	úhlová rychlost
$\Omega$	$[\text{rad s}^{-1}]$	vířivost
$\Gamma$	$[\text{m}^2 \text{s}^{-1}]$	cirkulace rychlosti